Mécanique des fluides

Section de génie civil

TD 2 - Correction

Exercices

Exercice 1 Retrouver la dimension de la viscosité dynamique μ puis celle de la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$, où ρ est la masse volumique du fluide. Soit V une vitesse et l une longueur, identifier les combinaisons adimensionnelles parmi les suivantes : $\nu l V$, lV/ν, νV^2 et $V/(\nu l)$.

Exercice 2 L'écoulement de Poiseuille est un écoulement laminaire d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique rectiligne. Le débit total à travers une telle conduite s'exprime comme

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu l} \tag{1}$$

où R est le rayon de la conduite, Δp la chute de pression le long de la conduite, μ la viscosité dynamique du fluide et l la longueur de la conduite. Déterminer la dimension de la constante $\pi/8$. Peut-on qualifier cette équation d'homogène ? Expliquer.

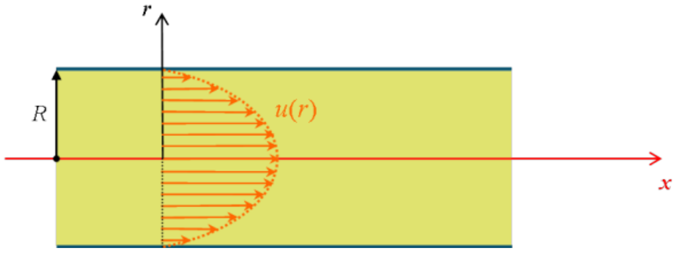

FIGURE 1 – Profil de vitesse d'un écoulement de Poiseuille

Exercice 3 Une formule pour estimer le débit Q au-dessus du trop-plein d'un barrage est :

$$Q = C\sqrt{2g}B(H + V^2/2g)^{3/2} \tag{2}$$

où C est une constante, g l'accélération de la gravité, B la largeur du trop-plein, H la profondeur de l'eau au-dessus du trop-plein, et V la vitesse de l'eau juste à l'amont du barrage. Cette équation est-elle valide dans n'importe quel système d'unités ? Expliquer.

Exercice 4 Le but de cet exercice est de calculer une vitesse de sédimentation. On se place dans de l'air de masse volumique ρ_f et nous considérons la chute d'une sphère de rayon $R = 5$ cm et de masse volumique ρ_s. Faire un bilan des forces qui s'exercent sur la sphère et calculer sa vitesse limite. La force de traînée est donnée par l'équation suivante :

$$F_D = \frac{1}{2}C_D\rho_f S v^2 \tag{3}$$

où C_D est le coefficient de traînée qui peut être estimé par l'abaque de la figure suivante (C_D en fonction du nombre de Reynolds), S la surface projetée de la sphère (πR^2), et v sa vitesse. On supposera le nombre de Reynolds très grand. Une fois la vitesse limite calculée, vérifier cette dernière hypothèse. Nous utiliserons les données suivantes : $\rho_f = 1,2$ kg/m^3, $\mu_f = 2 \times 10^{-5}$ Pa · s et $\rho_s = 1000$ kg/m^3.

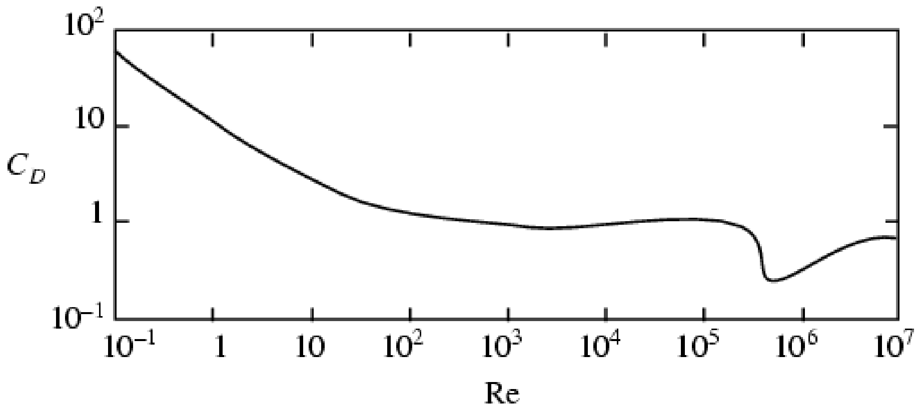

FIGURE 2 – variation de C_D en fonction du nombre de Reynolds.

Exercice 5 Lors de l'explosion d'une bombe nucléaire, une onde de choc de forme hémisphérique se propage dans l'air suite au relâchement initial d'énergie. Comme l'étude complète de ce problème est compliquée (équations différentielles non linéaires, écoulement compressible, thermodynamique), on se propose d'estimer l'évolution dans le temps du rayon de cette onde de choc par une analyse dimensionnelle. Pour ce faire on va supposer que ce rayon R ne dépend que de la quantité d'énergie libérée E au moment de l'explosion, de la masse volumique ρ du milieu dans lequel a lieu l'explosion et du temps t écoulé depuis l'instant initial. On va utiliser deux approches différentes pour y arriver, une approche « intuitive » entièrement basée sur l'analyse dimensionnelle et une approche basée sur le théorème de Buckingham–Π.

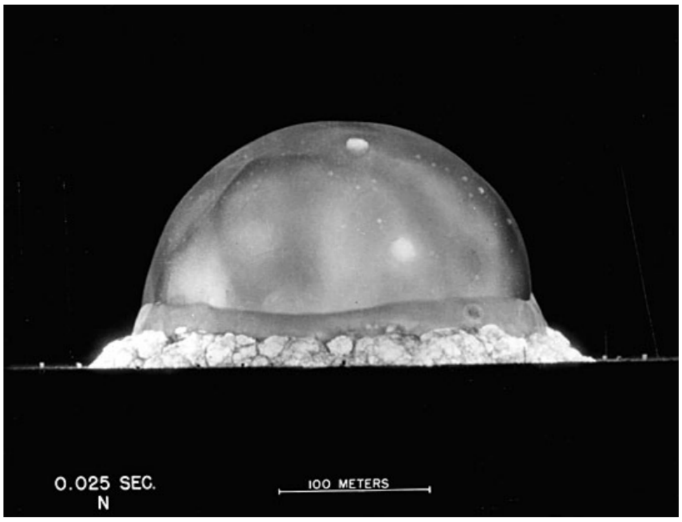

Figure 3 – Essai Trinity dans le cadre du projet Manhattan à t = 0,025 s le 16 juillet 1945 au Nouveau-Mexique.

1. On suppose que le rayon de l'onde de choc est proportionnel à l'énergie libérée, à la masse volumique du fluide où se propage l'onde ainsi qu'au temps écoulé ; c'est-à-dire $R \sim E^a \rho^b t^c$. Trouver les valeur des coefficients a, b et c tels que cet équation soit homogène du point de vue dimensionnel.
2. En utilisant le théorème de Buckingham–Π, déterminer le nombre adimensionnel qui caractérise ce problème. En déduire la relation qui lie le rayon R de l'onde de choc aux autres variables du problème.
3. Estimer l'énergie relâchée lors de l'explosion de l'essai nucléaire Trinity sachant qu'après 0,05 s le rayon de l'onde de choc mesure 180 m.

Exercice 6 Un modèle réduit de digue à l'échelle 1/20 est constituée d'un empilement de blocs en béton de masse 1 kg. Cette digue est censée protéger un port contre la houle. On a observé qu'il n'y avait aucun dommage tant que la hauteur H de la houle ne dépassait pas 30 cm sur le modèle réduit. Quel doit être le poids minimal des blocs en béton pour que la digue résiste à une houle géométriquement et dynamiquement similaire à celle du modèle réduit sachant que la houle peut atteindre 6 m de haut ?

Indications : *Supposer que le soulèvement d'un corps exposé aux vagues intervient lorsque $F_p/F_a = \varepsilon$ avec F_p le poids du corps, F_a la force d'arrachement due à l'eau et ε une constante* ***indépendante*** *de l'échelle. En première approximation on considérera que F_a est proportionnelle à la surface apparente du corps et au carré de la vitesse de l'eau ($F_a \propto U^2L^2$ avec U la vitesse de l'eau et L la longueur caractéristique du corps). Égaliser ensuite les nombres de Froude.*

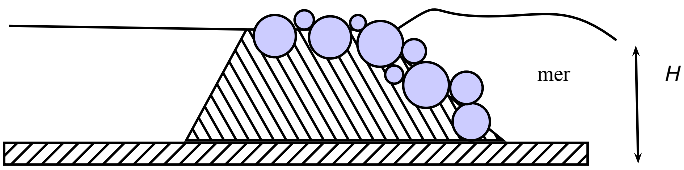

Figure 4 – Digue de protection contre la houle.

Exercice 7 Vous êtes chargés d'étudier en laboratoire la chute de pression par unité de longueur dans un tuyau de section circulaire.

1. Identifier les paramètres qui contrôlent cet écoulement. Sans utiliser le théorème Buckingham–Π, quel plan d'expérience envisageriez-vous pour réaliser cette expérience ?
2. Utiliser maintenant le théorème Buckingham–Π pour connaître les nombres sans dimensions sur lesquelles se construit le phénomène physique. Quel plan d'expérience peut-on maintenant envisager ?
3. Ci-dessous (Figure 5) est tracé le diagramme de Moody, célèbre ingénieur américain qui a tracé à partir d'expériences l'évolution du coefficient de frottement de Darcy-Weissbach défini par :

$$f = \frac{2d}{\rho U^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$

   en fonction de Re pour un tube cylindrique de diamètre d.

   Sur la base de ce que vous avez déterminé avec le théorème Buckingham–Π, expliquer l'intérêt de ce graphique ? Voit-on un degré de liberté supplémentaire ? Indiquer le nombre d'expériences nécessaires pour décrire le phénomène pour Re $\gg 10^5$ et avec une rugosité de $\frac{\epsilon}{D} = 0.03$

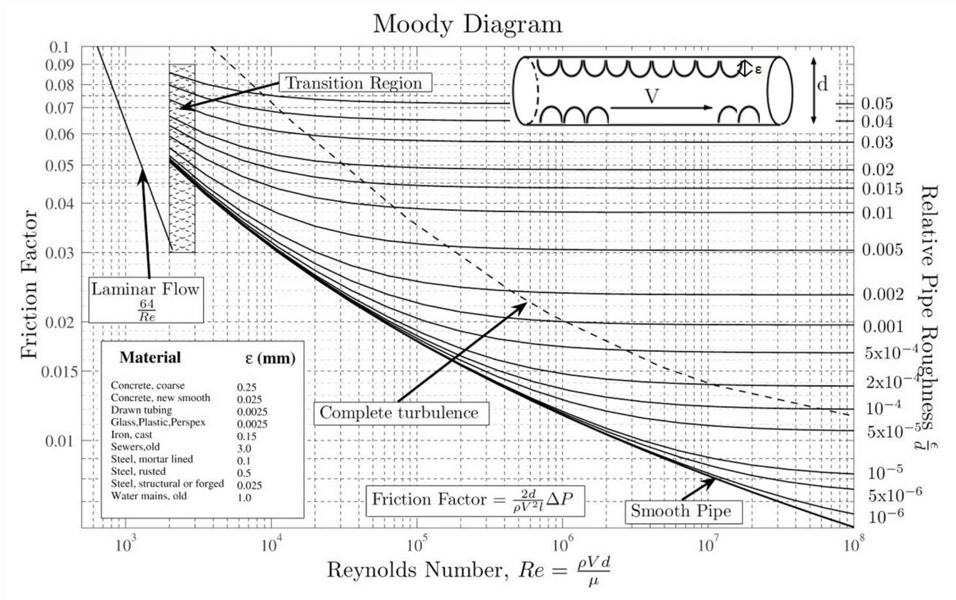

Figure 5 – Diagramme de Moody

Corrections

Exercice 1

- $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$;
- $[\nu] = L^2T^{-1}$;
- $[\nu l V] = L^4T^{-2}$;
- $[lV/\nu] = [-]$;
- $[\nu V^2] = L^4T^{-3}$;
- $[V/(\nu l)] = L^{-2}$.

Exercice 2

- $[Q] = L^3T^{-1}$, débit ;
- $[R] = L$, rayon ;
- $[\Delta p] = ML^{-1}T^{-2}$, chute de pression ;
- $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$, viscosité ;
- $[l] = L$, longueur ;
- $[\pi/8] = [-]$, rapport adimensionnel.

Cette équation est donc homogène.

Exercice 3 Le débit volumique Q s'exprime en L^3T^{-1}. $\sqrt{2g}$ s'exprime en $L^{1/2}T^{-1}$, B en L et $(H+V^2/(2g))^{3/2}$ en $L^{3/2}$. Le produit des trois composantes s'exprime donc en L^3T^{-1}. Afin que l'équation soit homogène la constante C doit être sans unités. L'équation est donc valable dans n'importe quel système d'unités.

Exercice 4 Les forces qui s'exercent sur la sphère sont son poids, la force de traînée (frottement de l'air) et la poussée d'Archimède. La poussée d'Archimède est ici négligeable et peut être simplifiée dans le bilan des forces. Lorsque la vitesse limite est atteinte, la somme des forces qui s'exercent sur la sphère est nulle, c'est-à-dire que le poids est contrebalancé par la force de traîné. On en déduit donc la vitesse limite

$$mg = F_D \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{\rho_s \frac{4}{3}\pi R^3 g}{\frac{1}{2} C_D \rho_f \pi R^2}} = \sqrt{\frac{8}{3} R \frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{g}{C_D}}.$$

Pour $Re \gg 1$, C_D vaut environ 0,5 ce qui nous donne $v_l \approx 46,7$ m/s. On injecte cette valeur de la vitesse limite dans la formule du nombre de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u L}{\mu}$$

avec $L = R$ m, $u = v_l$ m/s, $\rho_f = 1,2$ kg/m^3 et $\mu = 2 \times 10^{-5}$ Pa·s

$$\Rightarrow Re \approx 1,4 \times 10^5 \gg 1$$

Exercice 5

1. Étant donné que l'on suppose $R \sim E^a \rho^b t^c$, on peut écrire l'équation aux dimensions suivante (dans le système d'unités MLT)

$$\begin{aligned} [L] &= [ML^2T^{-2}]^a [ML^{-3}]^b [T]^c, \\ L^1 &= M^{a+b} L^{2a-3b} T^c, \end{aligned}$$

ce qui implique le système d'équation suivant

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ 2a - 3b &= 1 \\ c - 2a &= 0. \end{aligned}$$

Ce système comporte trois équations et trois inconnues, il est donc solvable. La résolution donne $a = 1/5$, $b = -1/5$ et $c = 2/5$ ce qui donne la relation suivante pour R

$$R \sim E^{1/5} \rho^{-1/5} t^{2/5}.$$

Cette relation signifie que R est du même ordre que le produit des autres variables, cependant cette relation n'est pas exacte. Il pourrait y avoir une constante C sans dimensions telle que

$$R = C \times E^{1/5} \rho^{-1/5} t^{2/5},$$

mais à ce stade de l'analyse et avec les outils dont nous disposons nous somme dans l'impossibilité de le savoir.

2. On va cette fois utiliser le théorème de Buckingham–Π. Ce problème fait intervenir quatre variable, R, E, ρ et t pour trois unités fondamentales, M, L et T. On peut donc construire $4 - 3 = 1$ variable adimensionnelle, que l'on notera Π_1. L'équation aux dimensions s'écrit donc comme

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= [R]^a [E]^b [\rho]^c [t]^d, \\ [-] &= L^a M^b L^{2b} T^{-2b} M^c L^{-3c} T^d \end{aligned}$$

ce qui donne le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} b + c &= 0 \\ a + 2b - 3c &= 0 \\ d - 2b &= 0. \end{aligned}$$

Ce système comporte trois équations et quatre inconnues, on peut donc en déterminer trois avec une variable libre. Étant donné que l'on veut trouver une relation pour R nous allons choisir $a = 1$. On retrouve un système de trois équations à trois inconnues, comme pour la question précédente. On obtient donc $b = -1/5$, $c = 1/5$ et $d = -2/5$ et $\Pi_1 = RE^{-1/5} \rho^{1/5} t^{-2/5}$. D'après le théorème de Buckingham–Π on peut donc écrire la relation

$$\Phi(\Pi_1) = 0,$$

ce qui veut dire que le nombre adimensionnel Π est constant puisque c'est le seul argument d'un fonction constante. On peut donc écrire

$$RE^{-1/5} \rho^{1/5} t^{-2/5} = C \Leftrightarrow R = C \times E^{1/5} \rho^{-1/5} t^{2/5}$$

qui est la relation que nous avions trouvé à la question précédente, avec la précision de la constante C. Dans la question précédente, nous étions arrivé à la conclusion que R était de l'ordre du produit des autres variables. Ici, le théorème de Buckingham–Π nous a permis de prouver que C était bien une constante. L'expérience permettra de déterminer sa valeur.

3. On ne peut pas répondre car l'équation fait intervenir le produit $C \times E^{1/5}$, et on ne peut donc déterminer que ce produit avec l'information disponible.

4. En prenant $t = 0,05$ s, $\varrho = 1,25\ kg/m^3$ et $R = 180$ m, nous obtenons

$$E = \frac{\varrho R^5}{t^2} = 9,45 \cdot 10^{13}\ \text{J},$$

ce qui correspond à 22,5 kilotonnes (équivalent TNT). La vraie valeur de l'essaie Trinity était de 18,6 kilotonnes , nous sommes dans le bon ordre de grandeur.

Exercice 6 Dans cet exercice nous considérons un modèle réduit de digue faite de blocs de béton de masse 1 kg. Elle est construite à l'échelle 1/20 par rapport à la réalité. Cette digue est censée protéger contre la houle jusqu'à une hauteur de 30 cm dans le modèle réduit, hauteur à partir de laquelle les blocs de béton sont arrachés. On connait l'expression de la condition de soulèvement des blocs de béton, $F_p/F_a = \varepsilon$, on on veut appliquer cette condition à la digue réelle. Notons avec un indice $_m$ les variable du modèle réduit et avec un indice $_r$ les variables correspondant à la réalité. Nous avons donc les conditions d'arrachement qui s'écrivent

$$\begin{aligned}
\frac{F_{p,m}}{F_{a,m}} &= \frac{F_{p,r}}{F_{a,r}} = \varepsilon, \\
\Rightarrow \frac{m_m g}{U_m^2 L_m^2} &= \frac{m_r g}{U_r^2 L_r^2}, \\
m_r &= m_m \frac{L_r^2}{L_m^2} \frac{U_r^2}{U_m^2}.
\end{aligned}$$

Étant donné que l'échelle géométrique est $e = 1/20$, nous avons que $L_r^2/L_m^2 = 1/e^2$. Égalisons maintenant les nombres de Froude, cela donne

$$\mathrm{Fr}_m = \mathrm{Fr}_r \Rightarrow \frac{U_m}{\sqrt{gH_m}} = \frac{U_r}{\sqrt{gH_r}} \Rightarrow \frac{U_m}{U_r} = \sqrt{\frac{H_m}{H_r}}.$$

Or comme le rapport H_r/H_m doit respecter l'échelle géométrique (similitude géométrique), nous avons donc que $U_r^2/U_m^2 = 1/e$ et donc finalement

$$m_r = m_m \frac{L_r^2}{L_m^2} \frac{U_r^2}{U_m^2} = \frac{m_m}{e^3} = m_m \times 8000 = 8000\ \text{kg}$$

Exercice 7 Dans cet exercice nous nous intéressons à la chute de pression (ou gradient de pression) dP/dx le long d'une conduite circulaire. Le but étant de déterminer le nombre d'expériences nécessaires pour déterminer cette chute de pression.

1. Les différentes variables qui contrôlent cet écoulement sont la masse volumique ρ de l'eau exprimée en ML^{-3}, la viscosité dynamique μ de l'eau exprimée en $ML^{-1}T^{-1}$, le rayon R de la conduite exprimé en L, la vitesse U de l'écoulement exprimé en LT^{-1} et la chute de pression par unité de longueur dP/dx de l'eau exprimée en $ML^{-2}T^{-2}$ dans un système d'unités MLT. On pourrait imaginer de faire une expérience où l'on fait varier le débit à travers une conduite (ce qui équivaut à faire varier la vitesse) et ou l'on mesure la chute de pression correspondant à cette variation de vitesse.
2. Étant donné que l'on a cinq variables pour trois dimensions, il y a donc $5-3=2$ nombres adimensionnels qui caractérisent cet écoulement. Ils s'écrivent donc de la forme

$$\Pi_i = \rho^a \mu^b R^c V^d (dP/dx)^e \quad i = 1, 2.$$

On peut donc écrire l'équation aux dimensions suivante

$$\begin{aligned}
[-] &= [ML^{-3}]^a [ML^{-1}T^{-1}]^b [L]^c [LT^{-1}]^d [ML^{-2}T^{-2}]^e, \\
[-] &= M^{a+b+e} L^{-3a-b+c+d-2e} T^{-b-d-2e}.
\end{aligned}$$

De cette équation aux dimensions on tire les système d'équations linéaires suivant

$$\begin{aligned}
a+b+e &= 0 \\
-3a-b+c+d-2e &= 0 \\
-b-d-2e &= 0.
\end{aligned}$$

Il y a cinq variables pour trois équations, on peut donc choisir librement deux paramètres parmi les cinq (a, b, c, d ou e). Néanmoins comme on cherche avant toute chose le gradient de pression en fonction des autres paramètre posons $e=1$ et $b=0$ (ce dernier choix est arbitraire on décide de s'affranchir la viscosité dans ce nombre adimensionnel).

La résolution du système d'équations donne donc $a=-1$, $c=1$ et $d=-2$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_1 = \frac{dP}{dx}\frac{R}{\rho U^2}.$$

Dans un deuxième temps on fixe $b = 1$ et $e = 0$. La résolution du système d'équations donne donc $a = -1$, $c = -1$ et $d = -1$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho U R} = \frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

On peut sans perte de généralité décider que $\Pi_2 = \mathrm{Re}$ et non $\Pi_2 = 1/\mathrm{Re}$.

Le théorème de Buckingham–Π affirme que la loi recherchée est sous la forme

$$\Phi(\mathrm{Re}, \Pi_1) = 0,$$

ce qui veut que par le théorème des fonctions implicites on peut écrire

$$\Pi_1 = f(\mathrm{Re}).$$

On peut donc maintenant envisager une seule expérience où l'on ferait varier le nombre de Reynolds et ou l'on mesurerai la chute de pression par unité de longueur correspondante.

3. La combinaison du théorème de Buckingham–Π et du théorème des fonctions implicites nous a permis d'affirmer que $(dP/dx)R/(\rho U^2) = f(\mathrm{Re})$. Or c'est exactement la signification du diagramme de Moody, si l'on remarque que le coefficient de frottement de Darcy-Weissbach f est équivalent à Π_1 à un facteur 4 près. Ce diagramme est présenté sur la figure 6.

   L'analyse du diagramme de Moody permet de mettre en évidence une variable cachée, à savoir la rugosité (axe vertical sur la droite du diagramme). On peut voir que pour une conduite donnée (ayant sa propre rugosité) et pour un nombre de Reynolds suffisamment élevé, le coefficient f est constant (la chute de pression est constante). Donc si l'on se donne pour objectif de déterminer f pour une conduite de rugosité $\varepsilon/D = 0,03$ à un nombre de Reynolds $\mathrm{Re} > 10^5$, on peut voir sur le diagramme que pour cette rugosité f devient constant à partir de $\mathrm{Re} \approx 1,1 10^4$. Il ne nous faudra donc qu'une seule expérience pour déterminer f, soit notre chute de pression.

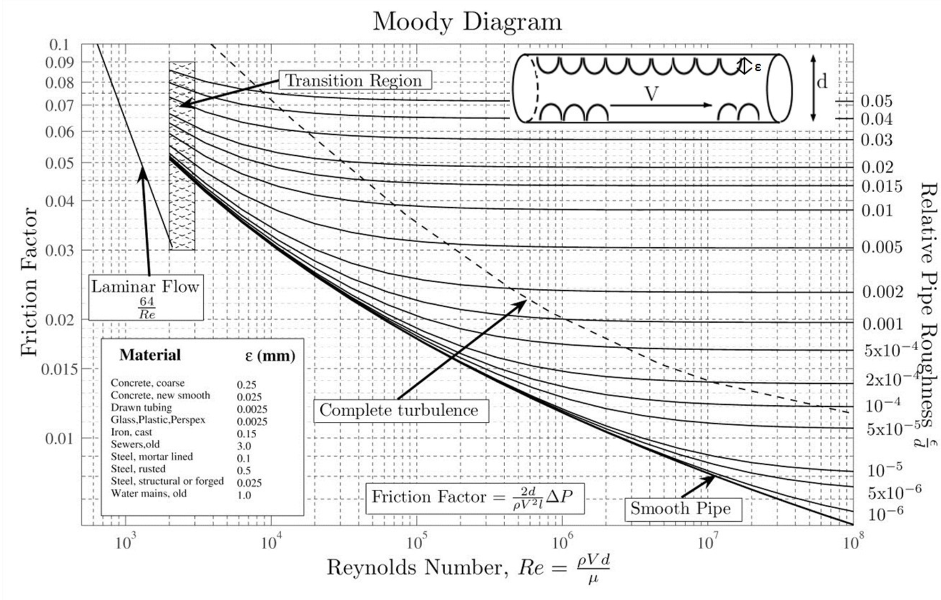

FIGURE 6 – Diagramme de Moody